Progression pour l'enseignement des fractions

<u>I Nécessité des nombres non entiers et premières écritures :</u>

En évitant absolument les divisions et les parasitages dus aux grandeurs "compliquées" comme l'aire, donc uniquement sur des <u>longueurs</u>, et par pliage en deux seulement (d'où en quatre, et en huit) de bandes de cartons (ou papier assez épais).

Activité classique des segments à mesurer à l'aide d'une bande-unité, les mesures étant alors des entiers dont 2 et 3, puis 2+1/2 , 1+3/4 , 3+1/2 [jusqu'ici « deux », « trois », « deux et demi », « un et demi » (!), « trois et demi », suffisent] … et ensuite 2+1/4 [là, ça ne va plus !], 1+1/2 etc. …

A) Certains élèves vont évidemment utiliser les « bonnes écritures », mais **dans ce premier temps**, on n'insiste pas là-dessus : **que** sur le fait que 2, 3 et 4 **ne suffisent plus**.

B) Deuxième temps : « Au fait, pourquoi le « 2 » dans ½ ?, le « 4 » dans ¼ ? » « Pour rappeler qu'il faut « 2 ***fois*** ½ pour *obtenir* 1 », qu'il faut « 4 ***fois*** 1/4 pour *obtenir* 1 ». Et généralisation à : « 1/8 , c'est quand il en faut huit … », avec un ou deux exercices avec des huitièmes de bande-unité (donc pliée trois fois en deux).

C) Troisième temps <u>éventuel</u> : Attention, le ***même*** segment a pu être codé 1+1/2 par certains, et 3/2 par d'autres ; de même pour 1+3/4 , codé aussi 7/4 , voire 1+1/2+1/4 . C'est ça le plus pénible avec les écritures fractionnaires : la non « unicité » ! Mais avec les élèves, il est **hors-sujet à l'école primaire** de faire faire des changements systématiques : il faut juste faire remarquer qu'il y a plusieurs possibilités. Par contre, pourquoi pas dire que, pour l'instant, on n'utilisera que les entiers et des **1/n** tous différents (c'est toujours possible).

En tous cas, si on peut (doit) faire *remarquer* ainsi, "incidemment", que « 3/4 et 6/8 , ça revient au même. » ; *faire écrire* par les élèves des égalités du genre 3/4 = 6/8 est **à exclure à l'école primaire** : c'est au programme <u>du collège</u>. **SAUF**, bien sûr, **10/100 = 1/10 (et 1/100 = 10/1000 , 100/1000 = 1/10 , etc.)** [voir VIII], car si les fractions sont encore enseignées à l'école, c'est uniquement pour pouvoir **définir les décimaux** correctement et simplement (mais oui!). Sûrement pas pour les fractions en elles-mêmes.

Donc <u>toute "**simplification**", tout calcul "systématique" est **à proscrire**</u> (par contre, pas de problème pour 3/7 + 8/7 = 11/7 : voir V).

<u>II « Nombre de fois » qu'il faut en prendre pour obtenir 1 ? :</u>

Maintenant, on peut passer à des aires, des angles, voire des volumes … et surtout des masses ! Mais en oralisant systématiquement par « C'est parce qu'il en faut … pour faire 1 » (le **nombre** 1 : éviter de parler de « unité », désormais. Ça complique tout pour un gain de rigueur exact en théorie, mais le mot « unité » est beaucoup trop polysémique pour qu'il ne soit pas en fait une source de confusion, dans la pratique, pour les élèves).

On peut donc dessiner des « parts de pizza » (éviter « fractions de pizza »), s'il n'y en a qu'**une** par pizza, et **<u>pour</u>** <u>*faire chercher*</u> : « Combien il en faut, *de **cette** part*, **pour faire 1** pizza ? ». Et on se « voit » bien *reporter* l'image de la part *n fois* [attention, en comptant aussi la part de départ !], et donc conclure : « C'est un $n^{\text{ième}}$ (de pizza), parce qu'il en faut n pour faire 1. ». Surtout pas pour que l'élève se dise : « Attention, il faut *bien* ***couper***, et que *toutes* les *parts* soient ***égales***. » (car, du coup, la difficulté se focalise sur l'action de partager !).

Mais on peut aussi proposer une tablette de « carrés de chocolat » (3 sur 5 par exemple), en colorier trois et demander : « Ça fait quelle portion de la tablette ? ». En reportant 5 fois ces carrés, on retrouve la tablette entière. Donc ces trois carrés, c'est 1/5 de tablette (mais surtout pas « 3 = 15 : 5 , donc 3 = 1/5 de 15. » !!).

Encore mieux avec les masses marquées « ½ kg ». « Pourquoi ½ kg ? » … « Car si on met DEUX « ½ kg » dans un plateau, ça fait exactement 1 kg. » … et qu'on ne risque pas de « couper le kg en deux pour faire un demi-kilo. » !! Idem avec les quarts d'heure et les huitièmes de camembert (voir textes précédents). Mais aussi avec le « quart de tour » qu'est l'angle droit. Et ces commentaires : « Il en faut quatre pour avoir 1. » sont à faire dès le CE2 !

III Rester encore avec les « 1/n » seulement et les comparer :

Qu'est-ce qui est le plus grand ? 1/5 ou 1/8 ? Et l'élève de répondre (trop) rapidement : « 1/8 , bien sûr ! » (On ne me la fait pas, je suis assez grand pour savoir que 8 > 5 !). « Tu en es sûr ? » … et on recommence tous les exercices déjà faits … « Ah ? Tiens, c'est le contraire ! ». Et ça, c'est **à institutionnaliser très tôt** (et ça ne pose pas de vrai problème, une fois la première surprise passée). « Évidemment, un quart, c'est plus grand que un dixième ».

IV Enfin [seulement !] aborder les numérateurs autres que 1 :

A) Une fois acquise la notion 1) « **Un** cinquième –et pas trop **1** cinquième–, c'est quand il en faut *cinq* pour avoir ***un*** (tout). » ; « Un dixième : il en faut *dix* pour avoir ***un*** » ; « un septième, c'est qu'il en faut sept » …, avec les "exceptions" que sont un *tiers*, un *quart* et un *demi*, à force de répétition de la phrase « Un *n*-ième, il en faut *n* pour trouver 1 », mais aussi d'illustrations *bien utilisées*, d'exemples concrets, où il faut *réobtenir le « tout »*, etc., on peut enfin donner la définition : « 3/5, c'est 3 fois un cinquième », qui n'est plus une « formule », du coup, mais une évidence, quand on la dit à l'**oral** : « Trois cinquièmes, c'est 3 cinquièmes. » ! Et on peut alors faire **écrire** : « 3/5 = 3 × 1/5 = 1/5 + 1/5 + 1/5 , voire déjà : 3/5 = 2/5 + 1/5 …

B) Désormais, à chaque fois qu'on verra quelque chose du genre 5/8 ou 7/3 , on fera se demander : « C'est quoi, 5/8 ? _ C'est **des** huitièmes. _ Et combien ? _ 5. » ; « C'est quoi, 7/3 ? _ C'est **des** tiers. _ Et c'est quoi, au fait, un tiers ? _ C'est quand il en faut *trois* pour faire 1. _ Et ici, il y en a combien ? _ Sept. ». Etc. Toujours faire revenir à l'***unique*** sens à développer explicitement en primaire. Donc sans jamais faire effectuer les partages, mais en s'intéressant au **résultat** de partages *déjà* effectués. Ce qui n'empêche pas de faire faire, parallèlement, des activités de partage, mais qu'on résout par division (euclidienne, le plus souvent), **sans faire de relation explicite avec les fractions**. Ce sera pour le collège.

C) Et il n'y a qu'à "faire constater" qu'il y a des **fractions supérieures à 1** (et d'autres inférieures). Sans avoir le moins du monde à faire apprendre par cœur le théorème « Une fraction est plus grande que 1 si, et seulement si, son numérateur [c'est lequel, au fait : celui du haut, ou celui du bas ?] est plus grand que son dénominateur », alors que si on a *compris* ce que représente une fraction, en mathématiques, il est clair que 9/7 > 1 « *puisque* 9/7 , c'est ***des*** *septièmes* ; qu'***un*** *septième*, c'est quand il en faut sept pour faire 1 , alors qu'ici, on en a neuf , et donc ***plus*** **que 7** –et là, pas besoin de penser « numérateur » ni « dénominateur » !– ; *donc* 9/7 > 1 ! Idem pour les fractions inférieurs à 1 : 3/5 < 1 « puisque des cinquièmes, il en faut 5 pour faire 1 , alors que là, il n'y en a que 3 : comme 3 < 5 , ben 3/5 , ça fait pas 1 ! ».

Quant à la fameuse formule **23/23 = 1** , eh bien, on la sait déjà (quand on a déjà répété cent fois « Un 23°, il en faut 23 pour faire 1 », on sait bien que « vingt-trois 23° = 1 » !!! ...). Ce n'est plus cette « formule magique » que les élèves utilisent sans cesse sans savoir d'où elle sort. Et on ne va surtout pas dire que « quand on *découpe* un gâteau en vingt-trois *parts* et qu'on en prend vingt-trois [vachement utile !], ça revient à prendre le gâteau *tout entier* [en plus, il faut identifier le « entier » avec « 1 ».) !!

V Somme de fractions :

Pour la **somme de fractions de même dénominateur**, de même : il n'y a plus l'ombre d'une difficulté –ni non plus d'une $n^{\text{ième}}$ formule à apprendre–, car qui ne sait pas que 3 fleurs, plus 7 fleurs, ça fait (3 + 7) fleurs ? Donc tout le monde sait que 3 huitièmes plus 7 huitièmes, ça fait (3 + 7) huitièmes ! … mais aussi ***pourquoi*** **« ça ne marche pas » avec « 3 huitièmes plus 7 onzièmes ? »** : en fait pas plus qu'avec 3 voitures plus 7 camions !! En fait, on *peut* « faire » 3/8 + 7/11 , mais simplement on ne sait pas l'*écrire* autrement ...

Bon, certains diront : « Oui, mais quand-même, 3 voitures plus 7 camions, ça fait bien 10 véhicules ! ». C'est vrai, il suffit de "voir" que « voiture » et « camion » c'est « véhicule », et ça marche. Et c'est bien la clé de l'addition des fractions « en général ». Mais c'est à faire au collège (et on peut le dire aux élèves : « On peut se débrouiller pour y arriver, mais vous apprendrez ça quand vous serez plus grands ... »).

Et il ne faut pas hésiter à faire faire plein d'exercices, où les élèves doivent dire « Là, on ne peut pas écrire autrement. », ou au contraire : « Là, c'est facile, parce qu'il n'y a **que** des septièmes ! » (Mais **pas** : « parce que toutes les fractions ont le même dénominateur !! »).

VI Encadrement d'une fraction par des entiers :

Une fois qu'on sait faire la somme de fractions « de même dénominateur », on peut généraliser les propriétés vues au IV (éviter "formules" !) en celle « partie entière plus partie "fractionnaire" (!!) », (par exemple : 13/5 = 10/5 + 3/5 = 2 + 3/5), et, encore plus généralement, les encadrements par deux entiers …

Ce n'est plus si difficile de voir que 2 < 13/5 < 3 : il suffit de « savoir ses tables » et de *voir* que 10 < 13 < 15 , donc *2 fois* 5 cinquièmes (c'est-à-dire 2×1) c'est plus que 13/5 (treize cinquièmes), et c'est moins que *3 fois* 5 cinquièmes (c'est-à-dire 3×1) : où est donc la difficulté ? Elle venait du fait qu'il *fallai*t *diviser* par 5, et sans doute aussi essayer mentalement de « *découper* en cinq *parts* » … alors qu'avec la « vraie » définition, et avec les tables, on n'utilise QUE la *multiplication*. Bien sûr, pour que tout ça apparaisse simple, il faut que le calcul (surtout mental) avec les entiers soit *vraiment* maîtrisé auparavant.

VII Placement des fractions sur un axe (droite numérique) :

Là, il y a une réelle difficulté (c'est la seule vraie, rencontrée depuis la « définition »). Mais cette difficulté est liée au lien pas toujours compris entre **longueur et abscisse**, c'est-à-dire au rôle d'une **origine** arbitraire lors de la "**numérotation**" d'une graduation. En réalité, la difficulté est déjà présente avec les entiers, mais elle est masquée par le fait que, pour numéroter (ou utiliser) une graduation en nombres entiers, l'élève se contente le plus souvent de compter (« 0, 1, 2, 3, .. »). Cette technique plus ou moins sauvage permet de suppléer à l'incompréhension. Mais quand on n'a plus seulement des entiers, ça ne marche plus !!

Cette difficulté *semble* donc apparaître avec les fractions, mais les fractions ne font que révéler ce qui était caché. Comme pour beaucoup de choses (numération, calcul mental par dix ou cent), les fractions semblent « tout compliquer » –et ce n'est pas faux, évidemment–, mais c'est simplement parce que les techniques, les « théorèmes-élèves » qui fonctionnaient jusqu'alors ne fonctionnent plus. Le sens, lui, n'a en fait pas tant changé, mais jusqu'ici on avait pu faire sans comprendre (ce qui est quand-même le comble en mathématiques !) ...

VIII Les [si mal nommées] « fractions décimales » :

À l'école, **c'est presque fini pour l'enseignement des fractions**. Il ne reste plus qu'à maîtriser le rapport entre 1/10 et 1/100 , d'abord, en reposant toujours la question « qu'est-ce qu'un centième ? Et un millième ? ». « Alors, un centième, c'est plus, ou moins, qu'un millième ? Et *combien de fois* plus ? » [Cette dernière question n'aura <u>jamais</u> été posée jusqu'alors : dans le cas *général*, c'est un objectif du *collège* !] Réponse : « Dix fois, "évidemment", puisque 1000 , c'est 10 fois 100 : il faut donc <u>dix fois plus</u> de millièmes que de centièmes pour obtenir <u>la même chose</u> (en l'occurrence, 1), et donc, un centième, c'est **dix fois plus** gros qu'un millième. ». Tout cela dit « en mots » dans premier temps, comme toujours. [Et là, c'est le manque de résultats mémorisés « évidents », la <u>non maîtrise du « calcul mental »</u>, qui fait obstacle : pas tellement les fractions elles-mêmes !].

On fait encore plusieurs exercices amenant à des égalités du type 40/100 = 4/10 , 500/1000 = 5/10 [mais à ne pas rapprocher encore *systématiquement* de ½ !], etc. En réalité, c'est ça la seule "nouveauté" avec les « fractions décimales ». Fractions qui n'ont en fait strictement rien de particulier en elles-mêmes (ce ne sont pas de « nouvelles fractions », quoique écrivent de nombreux manuels …) ; simplement, on s'autorise à les additionner, même dans les cas où, jusqu'à présent « ça ne pouvait pas se faire » (comme 45/10 + 2/100 = 45× 10/100 + 2 centièmes = (450+2) centièmes = 452/100 …). C'est tout ! Et c'est la seule chose dont on a besoin pour les décimaux. Alors, pourquoi en faire plus sur les fractions à l'école ?!? Oui, il faut en faire moins pour que les élèves comprennent mieux …

Et voilà. Maintenant, les élèves sont prêts à utiliser les décimaux, sans n'y voir que des chiffres, et alors « Dans 45,567 , 6 est *le chiffre des centièmes* », formule sans grand sens parfois pour les élèves –c'est juste pareil que « *deuxième chiffre après* la virgule »– devient : « Dans 45,567 , 6 , c'est *des centièmes* … et je sais ce que c'est que des centièmes : il en faut cent pour faire 1 ! ». Tout peut changer …