Les nombres décimaux Auxerre 3 2018 – 2019

CPC Nathalie Hutin



RÉGION ACADÉMIQUE BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION





ww.ac-dijon.fr





Présentation



- retour sur les fractions
- les décimaux dans nos classes : questionnaire et constats
 - → les erreurs d'hier à aujourd'hui
- origine des erreurs et nature des obstacles
 - → petit historique
 - → ruptures et continuité
 - →retour sur notre système décimal et positionnel
- des pistes : analyse de situations + outils
- synthèse



Les décimaux dans nos classes : questionnement







Quelle(s)
difficulté(s) dans
nos classes?



Des résultats qui témoignent de difficultés

Entoure la fraction égale à 80,4

48,3 % des élèves ont répondu correctement à l'entrée en 6e en 2006

48,6 % fin de 5^e en 2012



Des résultats qui témoignent de difficultés

Écrivez
$$\frac{1}{4}$$
 sous forme de nombre à virgule:

$$\frac{1}{4}$$
 =

27,0% des élèves ont répondu correctement à l'entrée en 6° en 2006*

28,6 % fin de 5^e en 2012





Des résultats qui témoignent de difficultés

peut s'écrire...

a. 0,35 b. 0,5 c. 0,6 d. 1,67 e. 3,5 f. 5,3

28% de bonnes réponses aux JDC (Journées défense et citoyenneté)

peut s'écrire...

a. 2,7 b. 3,5 c. 5,3 d. 7,2

67,9% de bonnes réponses aux JDC (Journées défense et citoyenneté)

IGEN Les nombres décimaux > 17 novembre 2014



Les décimaux

vus comme un ensemble de règles,

considérés comme une extension des entiers naturels : une illusion de facilité ?



Retour sur l'histoire des nombres décimaux

En 1579, François Viète (1540 ; 1603), mathématicien français, encourage l'usage des fractions décimales.

Simon Stevin, comptable hollandais du XVIème siècle, transforme l'écriture 21 + 5/10 + 3/100 + 2/1000 en $21^{(0)} 5^{(1)} 3^{(2)} 2^{(3)}$

où le (0) indique les unités entières, (1) les dixièmes,

(2) les centièmes, etc.

On prononce: 21 « commencements », 5 « primes », 3 « secondes », 2 « tierces »



Statue de Stevin à Bruges





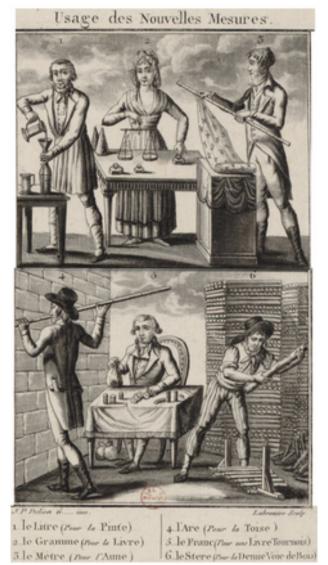
En 1595, le suisse Jost Bürgi (1552 ; 1632) fait surmonter le chiffre des unités par un petit rond :

。 89532

Un peu plus tard, le mathématicien écossais John Napier remplace le (0) par une virgule (ou un point) et n'écrit pas les autres symboles

21 + 5/10 + 3/100 + 2/1000 s'écrit alors 21,532

Révolution française : imposition du système métrique



Estampe de 1800 : usage des nouvelles mesures décimales, rendu obligatoire en France



Les nombres entiers



Les nombres entiers naturels



Définition axiomatique des entiers naturels Giuseppe PEANO (1858 – 1932)

- L'élément appelé zéro et noté 0, est un entier naturel.
- Tout entier naturel *n* a un unique successeur : *n* +1
- Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur.
- Deux entiers naturels ayant même successeur sont égaux.



Les nombres décimaux



Les nombres décimaux



- Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous la forme $\frac{10^n}{10^n}$ où a est un entier relatif et n est un entier naturel.
- Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire comme produit d'un entier relatif et d'une puissance de 10.
- Un nombre décimal est un nombre possédant un développement décimal limité.



Les nombres décimaux



<u>Définitions d'un nombre décimal pour les élèves</u>

- -Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.
- -Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire sous forme d'une fraction décimale.

$$\frac{1}{4} = 0.25 = \frac{25}{100}$$



Continuité... et ruptures



Une extension des savoirs

• Le nouvel ensemble englobe le précédent.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$$

- Les décimaux contribuent à la mesure du continu.
- L'addition des décimaux est, comme celle des entiers, commutative, associative, etc.



Les fonctions des nombres

Les entiers

- Ils servent à exprimer des quantités.
- Ils servent à ordonner et à calculer.
- Le nombre entier se construit dans une dialectique ordinale / cardinale.

Les décimaux

- Ils servent à exprimer des mesures de grandeurs,
- à désigner, à ordonner et à calculer.
- La représentation par l'écriture à virgule se construit dans une dialectique valeur exacte / valeur approchée.



Les fonctions des nombres

Un usage qui évolue au cours de la scolarité

Constructions à partir d'insuffisances des nombres connus

Au cycle 3 Insuffisance des nombres entiers pour mesurer et représenter sur une demi-droite graduée



L'origine et la nature des obstacles

« Un concept se forme sur une longue période (plusieurs années pour le concept de décimal). Il ne s'élabore pas isolément mais en relation avec d'autres concepts » (R. Douady, 1980)

Il s'appuie sur les connaissances des élèves.

Un obstacle lié aux connaissances

où le nombre décimal brise les règles de fonctionnement habituelles.



Des difficultés... liées au passage de N à D

- « Le nombre le plus long est le nombre le plus grand. » conduit à 13,456 > 423,1

-« Pour multiplier par 10, 100 ou 1000 on ajoute un, deux ou trois zéros. » conduit à $13,7 \times 10 = 13,70$ ou 130,7

-Dans N, tout nombre a un successeur et tous, sauf 0, ont un prédécesseur. « Le nombre qui suit 1,23 » n'a pas de sens, difficultés pour trouver un nombre vérifiant l'encadrement : 6,82 < < 6,83.



Des difficultés... liées au passage de N à D

-difficultés avec les mots :

```
confusions « dixième » / « dizaine », « centième » / « centaine » « une dizaine » < « une centaine » mais « un dixième » > « un centième »
```

-polysémie du mot dixième :

« Le dixième coureur est arrivé juste après le neuvième. » « Le dixième de 120 euros. »

« un dixième de seconde sépare les deux coureurs. »



Des difficultés... liées au codage des nombres à virgule

- La virgule est vue comme un séparateur de deux entiers, comme la barre de fraction.

conduit à
$$1/4 = 1,4$$
 ou à $1,5 + 2,7 = 3,12$

- Ceci est sans doute renforcé par une introduction des nombres à virgule ne s'appuyant que sur des mesures : 5m 12cm = 5,12m
- Que penser de l'ajout de zéros pour comparer deux nombres décimaux ? Comparer 12,37 et 12,7 en écrivant 12,37 et 12,70 ?
 - -La virgule vue comme un axe de symétrie du nombre. conduit à écrire 2,007 pour « deux unités et sept centièmes »





Des difficultés...

liées à des conventions particulières dans les usages sociaux

-« Trois mètres sept plus deux mètres douze » font cinq mètres dix-neuf alors qu'en classe

trois virgule sept plus deux virgule douze font cinq virgule quatre-vingt-deux

$$3,7 + 2,12 = 5,82$$

-« Un kilo cinq et deux kilos deux cent cinquante »

-« Un euro cinq pour un kilo cinq »



Autres difficultés

- Pour écrire un nombre décimal en chiffres, on peut devoir, comme pour les entiers, écrire des zéros qui ne se disent pas.

« mille douze » ; « deux unités et treize millièmes »...

- Des zéros inutiles ? ou pas ?
- Est-ce la même chose de dire que l'on mesure 1,8m ou 1,80m?
 - Le système sexagésimal pour les heures. 2h15min = 2,25h



Continuité et ruptures



Des nombres entiers aux nombres décimaux

Continuité:

Dans l'écriture à virgule d'un nombre décimal, on conserve :

- Le principe de position
- Le principe du rapport de dix entre les différentes unités.

<u>Ruptures</u> : connaissances sur les nombres entiers qui ne sont plus valides sur les nombres décimaux :

- Les nombres entiers servent à dénombrer des collections d'objets.
- Tout nombre entier a un successeur.
- Entre deux entiers, on ne peut intercaler qu'un nombre fini d'entiers.
- Si un entier s'écrit avec plus de chiffres qu'un autre, alors il est > ce dernier.
- La multiplication est une addition itérée.
- Le produit est supérieur aux nombres multiplié, le quotient est inférieur.



L'origine et la nature des obstacles

... la réussite dans l'apprentissage des décimaux est conditionnée par une bonne connaissance des nombres entiers.

Cet enseignement ne se limite pas à apprendre à écrire et à dire les nombres, mais s'attache à permettre une compréhension des aspects décimal et positionnel.

Conférence de consensus sur la numération (Cnesco, 2015)



Notre numération repose sur deux principes :

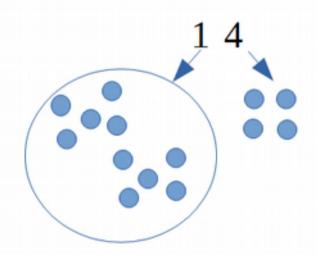
- principe <u>décimal</u> : réitération de groupements par dix
- principe <u>positionnel</u>: la signification d'un chiffre (signe) dépend de sa position dans l'écriture du nombre.



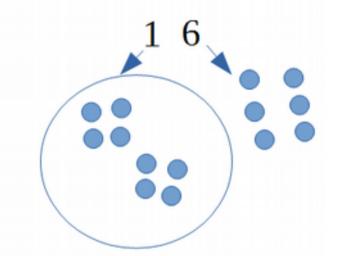
Système conventionnel décimal

Écrivons « quatorze »

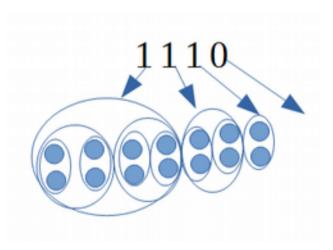
En base 10



En base 8



En base 2







Le principe de position :

- dans **2,**33, le 2 vaut 2 unités donc 2,
- dans 3,23, le 2 vaut 2 dixièmes donc 0,2.

Le principe du *rapport de dix* entre les **différentes unités** :

- dans 2,33, le 2 vaut 2 unités donc 20 dixièmes, donc 200 centièmes,
- dans 3,23, le 2 vaut 2 dixièmes donc 20 centièmes.

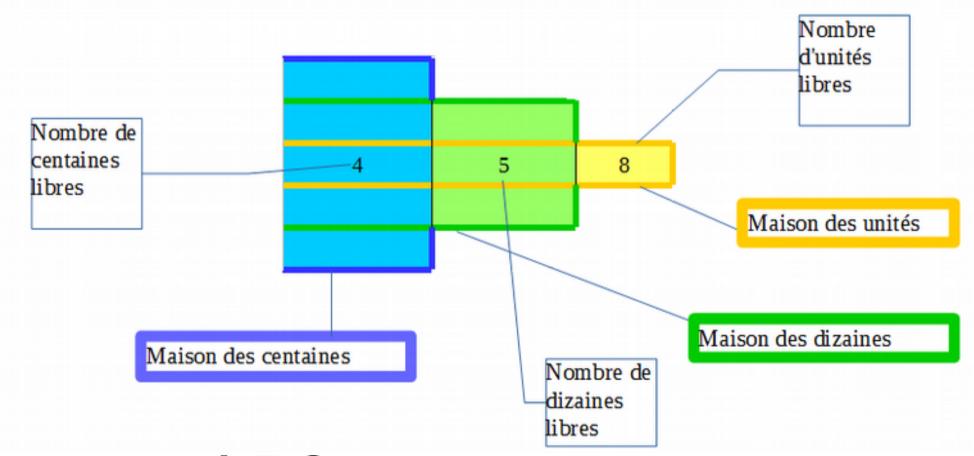




Ce système pour être compris doit faire apparaître la notion d'<u>inclusion</u> des unités dans les dizaines, des dizaines dans les centaines, mais aussi, des dixièmes dans les unités, des centièmes dans les dixièmes...

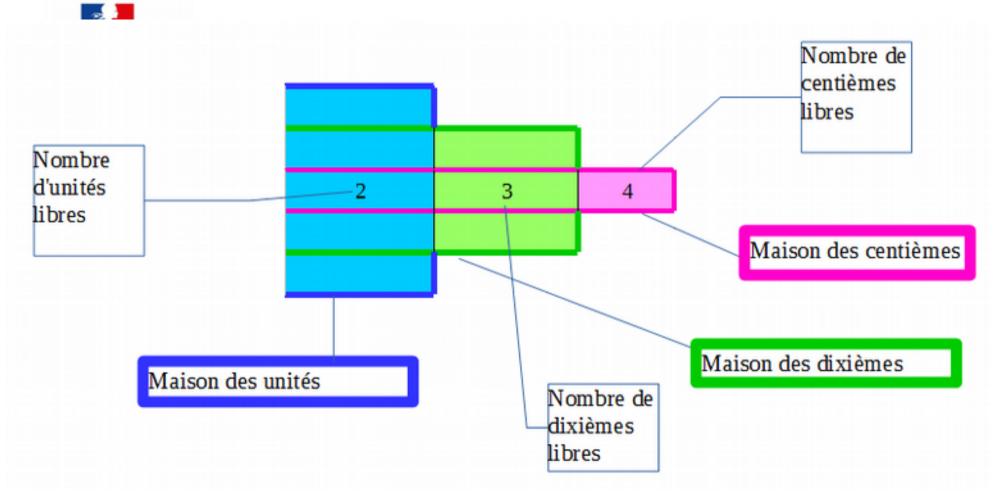






458





2,34



- Temps trop important consacré aux nombres entiers en début de CM1 et CM2
 - → Travailler sur les progressions au sein du Cycle 3
- Introduction tardive de l'écriture décimale
 - → Travailler sur le nombre décimal, c'est poursuivre la construction des nombres entiers
 - → Veiller à un enrichissement progressif sur le cycle
 - → Importance du diagnostic pour organiser son enseignement et réguler les apprentissages
- Programmation segmentée
 - → Rebrassage régulier : les travaux sur les fractions décimales et les décimaux s'alimentent mutuellement [au travers de la compétence Représenter]
- Méconnaissance réciproque école-collège
 - → Echanger sur la chronologie de la construction du nombre décimal (CEC)

Conférence de consensus sur la numération (Cnesco, 2015)





S'appuyer sur des activités où le nombre entier montre ses limites

Fraction simple

- fraction unitaire
- multiples de la fraction unitaire
- fraction > 1

Fraction décimale

Nombre décimal





Le sens des nombres se construit dans la compréhension et l'usage combiné des propriétés, des relations, des désignations, et par la pratique d'opérations dans lesquelles un nombre intervient comme acteur ou résultat.

Les nombres décimaux se construisent en continuité et en rupture par rapport aux nombres entiers.

La compréhension du système décimal et positionnel est fondamentale.



Au cycle 2



La compréhension et l'appropriation de ce système décimal de position passe par des décompositions, des recompositions :

En s'appuyant sur la

En s'appuyant sur la

MANIPULATION

En passant par le

DESSIN

En utilisant la VERBALIS ATION En privilégiant l'ÉCRIT l'ORAL avant l'ÉCRIT

S'appuyer sur les acquis du cycle 2 acquis du cycle 2 sur la notion de nombre, nombre, et la numération



Au cycle 3



Évolution du statut du nombre : Exprime des quantités et des mesures de grandeurs qui ne sont plus égales à un nombre entier d'unités.

formulations ORALES

Puis écritures

SYMBOLIQUES

Puis écritures à

Puis écritures à

VIRGULE

progressivement

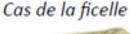
Les différentes écritures doivent coexister tout au long du cycle 3 pour renforcer la compréhension du codage que constitue l'écriture à virgule d'un nombre décimal.





Fraction simple Fraction décimale Unité Nombre décimal Fraction quotient

= outil pour traiter des problèmes que les nombres entiers ne peuvent résoudre





- Concept d'UNITE pas encore stabilisé
- → Continuer de matérialiser une unité pour manipuler, se représenter, répliquer ...
- → Varier les supports utilisés
- → Travailler sur des fractions > 1
- → Utiliser demi-droite graduée
- → Travailler les séances de calcul mental

 La rupture entre le mot <u>et l'écriture</u> fractionnaire





Les nombres décimaux se construisent en continuité et en rupture par rapport aux nombres entiers.

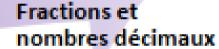
Cycle 3

Cycle 4



Cycle 2

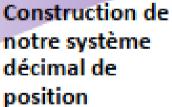
Fractions et nombres décimaux



Cycle 1

Construction du nombre

Les nombres entiers servent à dénombrer les objets.

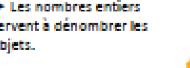


Le principe de position Les rapports entre les différentes unités de numération.

- Fractions simples
- Fractions décimales.
- Nombres à virgule
- ► ^a/_c (quotient en 6^{ème})

quotient ¹³ = 2,6

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \times \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{c}}{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}$$









Mathématiques : efficacité, plaisir et ambition pour tous



Développer le **plaisir** et **le sens de l'effort** chez l'élève. Ne pas sous estimer son potentiel : proposer un contenu ambitieux, accessible et l'encourager.

Rééquilibrer l'enseignement mathématique autour du triptyque manipuler/verbaliser/abstraire.

Passer du **« faire »** à **« apprendre »** : le **«** faire » a donné lieu à une dérive de manipulations sans structuration.

Expliciter les liens entre la langue française et les mathématiques

D'après 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques Rapport remis le 12 février 2018

par Cédric Villani, député de l'Essonne et Charles Torossian, inspecteur général de l'éducation nationale





